BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VI–a

1. Aflați numerele de forma $\overline{abcd}$, scrise în baza 10, $\overline{cd} < \overline{ab}$, știind că produsul dintre numărul format din primele două cifre ale numărului și numărul format din ultimele două cifre ale sale este egal cu 300, iar $\frac{(\overline{ab},\overline{cd})}{[\overline{ab},\overline{cd}]} = 0,08(3)$; unde prin $(\overline{ab},\overline{cd})$ și $[\overline{ab},\overline{cd}]$ s-au notat respectiv c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru numerele $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$.

Prof. Gheorghe Iacoviță

Soluție: Fie $\overline{ab} = m,\ \overline{cd} = n$. Putem scrie $m > n$, $mn = 300$, $\frac{(m,n)}{[m,n]} = 0,08(3)$.

$\frac{(m,n)}{[m,n]} = 0,08(3) \Leftrightarrow \frac{(m,n)}{[m,n]} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12(m,n) = [m,n]$; de unde $12(m,n)[m,n] = [m,n]^2$; și cum $(m,m)[m,n] = mn$, avem: $12 \cdot 300 = [m,n]^2 \Rightarrow [m,n] = 60$, deci $(m,n) = 5$. Atunci $m = 5x$, $n = 5y$, $(x,y) = 1$; în concluzie vom avea: $m \cdot n = 300 \Rightarrow 5x \cdot 5y = 300 \Rightarrow xy = 12$.

Deoarece $m > n \Rightarrow x > y$, rezultă că avem următoarele situații:

1) $x = 4,\ y = 3 \Rightarrow m = 20,\ n = 15$; adică $\overline{ab} = 20$, $\overline{cd} = 15$, deci $\overline{abcd} = 2015$.

2) $x = 6,\ y = 2$, dar $(x,y) \neq 1$.

3) $x = 12,\ y = 1 \Rightarrow m = 144,\ n = 5$, care nu sunt numere formate din două cifre.

În concluzie, $\overline{abcd} = 2015$.

Barem:

Fie $\overline{ab} = m,\ \overline{cd} = n$. $\frac{(m,n)}{[m,n]} = 0,08(3) \Leftrightarrow \frac{(m,n)}{[m,n]} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12(m,n) = [m,n]$	**1p**
$12(m,m)[m,n] = [m,n]^2$	**1p**
Găsește $[m,n] = 60$ și $(m,n) = 5$	**1p**
$m = 5x$, $n = 5y$, $(x,y) = 1$; de unde $m \cdot n = 300 \Rightarrow 5x \cdot 5y = 300 \Rightarrow xy = 12$.	**1p**
Discută cazurile.	**2p**
Finalizare.	**1p**

2. a) **(3p)** Fie $A = \left\{ \frac{2024}{13}, \frac{2025}{14}, \frac{2026}{15}, \ldots \right\}$ și $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \in A \}$. Aflați cardinalul mulțimii *B*.

Supliment Gazeta Matematică, aprilie 2014

b) **(4p)** Determinați numerele $a, b, c \in \mathbb{N}$, cu $a < b$ astfel încât $\frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2} = \frac{c + 3}{c + 1}$.

Gazeta Matematică nr.1/2014

Soluție: a) Mulțimea *A* se mai poate scrie sub forma

$A = \left\{ \frac{2011+13}{13}, \frac{2011+14}{14}, \frac{2011+15}{15}, \ldots \right\} = \left\{ \frac{2011}{13} + 1, \frac{2011}{14} + 1, \frac{2011}{15} + 1, \ldots \right\}$. Deoarece *B* este formată din numerele naturale din *A*, acestea fiind de tipul $\frac{2011}{n} + 1$, trebuie ca n să fie un divizor al lui 2011 mai mare sau egal cu 13. Cum 2011 este prim, rezultă că mulțimea *B* are un singur element $\frac{2011}{2011} + 1 = 2$; card $B = 1$.

b) Relația dată se poate scrie $\frac{a(a+1)}{2}+\frac{b(b+1)}{2}=1+\frac{2}{c+1}$. Dar $a(a+1)$ și $b(b+1)$ sunt produse de numere consecutive $\Rightarrow \frac{2}{c+1}\in\mathbb{N}$ de unde $c\in\{0;1\}$. Pentru $c=0$ avem $a(a+1)+b(b+1)=6$, cu variantele $a=0;\ b=2$ și $a=2;\ b=0$. Pentru $c=1$ avem $a(a+1)+b(b+1)=4$, cu $a=1; b=1$. Dar $a<b$, deci singura soluție este $a=0;\ b=2;\ c=0$.

Barem:

a) $A=\left\{\frac{2011+13}{13},\frac{2011+14}{14},\frac{2011+15}{15},...\right\}=\left\{\frac{2011}{13}+1,\frac{2011}{14}+1,\frac{2011}{15}+1,...\right\}$	**1 p**
Deoarece *B* este formată din numerele naturale din *A*, acestea fiind de tipul $\frac{2011}{n}+1$, trebuie ca *n* să fie un divizor al lui 2011 mai mare sau egal cu 13.	**1 p**
Justifică faptul că 2011 este număr prim. Rezultă $\text{card } B=1$	**1p**
b) $\frac{a(a+1)}{2}+\frac{b(b+1)}{2}=1+\frac{2}{c+1}$	**1 p**
$a(a+1)$ și $b(b+1)$ produse de numere consecutive $\Rightarrow \frac{2}{c+1}\in\mathbb{N}$ de unde $c\in\{0;1\}$	**1p**
Discuție și finalizare.	**2p**

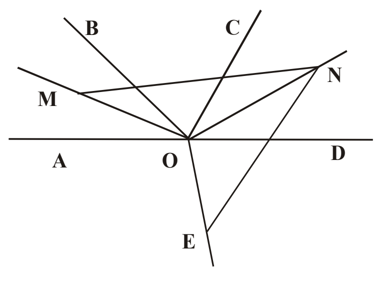
3. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOA$ unghiuri în jurul punctului *O* astfel încât: $m(\sphericalangle BOC)=m(\sphericalangle AOB)+n^0$, $m(\sphericalangle COD)=m(\sphericalangle BOC)+n^0$, $m(\sphericalangle DOE)=m(\sphericalangle COD)+n^0$, $m(\sphericalangle EOA)=m(\sphericalangle DOE)+n^0$, $n\in\mathbb{N}^*$, iar $(OA$ și $(OD$ sunt semidrepte opuse.

a) **(3p)** determinați $m(\sphericalangle AOB)$;

b) **(4p)** dacă $(OM$ este bisectoarea $\sphericalangle AOB$ și $(ON$ este bisectoarea $\sphericalangle COD$, iar $[OM]\equiv[OE]$, arătați că $[MN]\equiv[NE]$.

Prof. Stela Boghian

Soluție: a) Fie $m(\sphericalangle AOB)=x$, $m(\sphericalangle AOD)=m(\sphericalangle DOA)$,
$x+x+n^0+x+2n^0 = x+3n^0+x+4n^0$, de unde $x=4n^0$,
$m(\sphericalangle AOB)=4n^0$; $m(\sphericalangle BOC)=5n^0$; $m(\sphericalangle COD)=6n^0$,
ele împreună având $180^0 \Rightarrow n^0=12^0$ și $m(\sphericalangle AOB)=48^0$.



b) $m(\sphericalangle BOC)=60°$; $m(\sphericalangle COD)=72°$; $m(\sphericalangle DOE)=84°$; $m(\sphericalangle EOA)=96° \Rightarrow m(\sphericalangle MON)=m(\sphericalangle EON)=120^0$.
$\triangle MON \equiv \triangle EON (L.U.L.) \Rightarrow [MN]\equiv[NE]$.

Barem:

a) Fie $m(\sphericalangle AOB)=x$, $m(\sphericalangle AOD)=m(\sphericalangle DOA)$, $x+x+n^0+x+2n^0 = x+3n^0+x+4n^0$	**2p**
$n^0=12^0$ și $m(\sphericalangle AOB)=48^0$.	**1p**
b) $m(\sphericalangle BOC)=60°$; $m(\sphericalangle COD)=72°$; $m(\sphericalangle DOE)=84°$; $m(\sphericalangle EOA)=96°$	**1p**
$m(\sphericalangle MON)=m(\sphericalangle EON)=120^0$.	**1p**
Demonstrază că $\triangle MON \equiv \triangle EON$	**1p**
$[MN]\equiv[NE]$	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.